غلامرضا یاسی‌پور

# فرض ضمنی

## ملانصرالدین، کانتور و غزها![*]

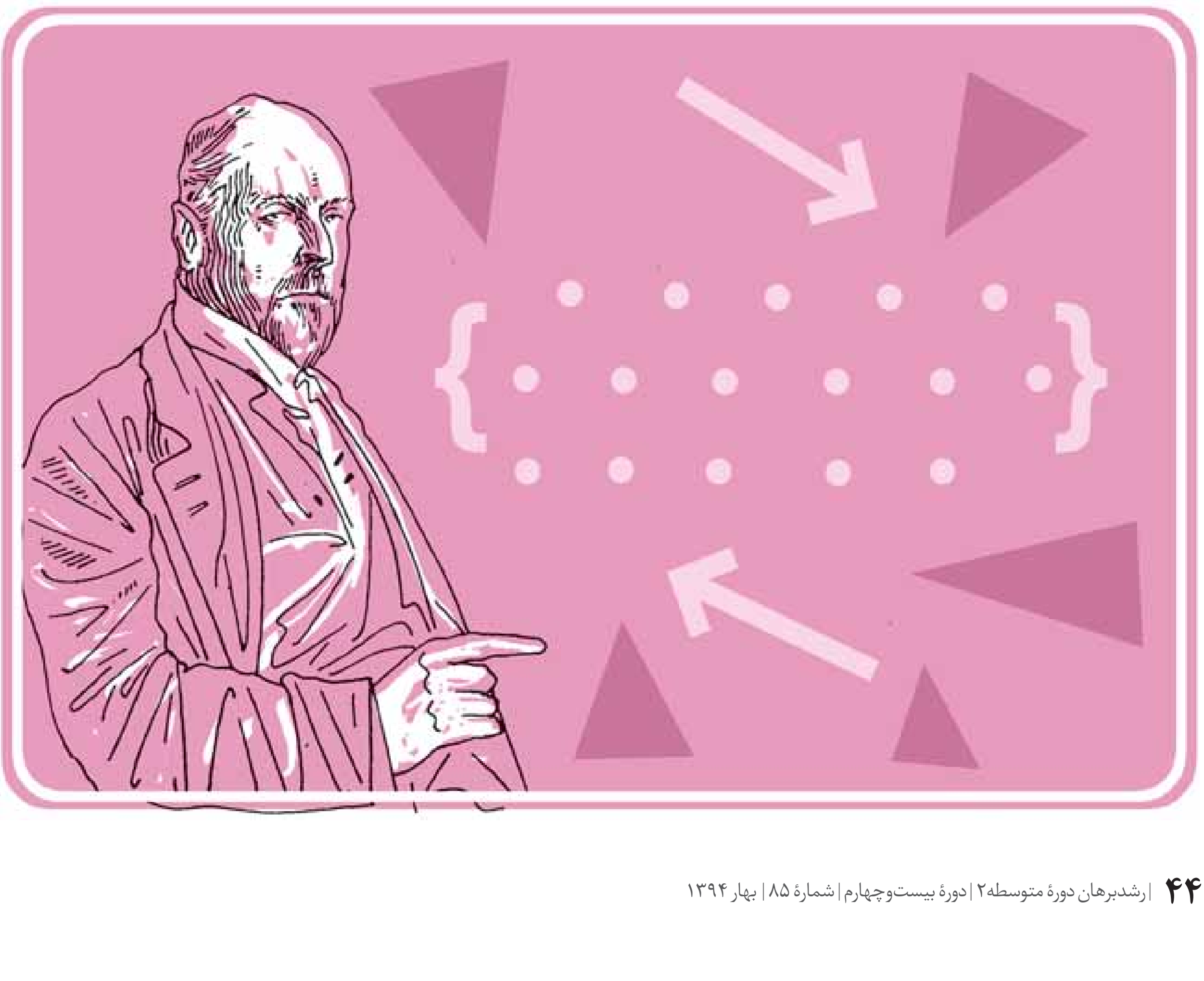
لابد از خود می‌پرسید: **ملانصرالدین** چه نسبتی با **ژرژ کانتور**[1] دارد و از آن مهم‌تر، کانتور چه رابطه‌ای با غُزها دارد؛ و در این میان، «فرض ضمنی»[2] که در صدر مقاله نشسته، کیست و ارتباطش با این‌ها چیست؟ و آن‌وقت، چرا در عنوان مقاله پای غُزها به میان کشیده شده است؟

برای پاسخ به این پرسش‌ها، نخست به ذکر چند حکایت واقعی، نیمه‌واقعی، و ساختگی می‌پردازیم، و آن‌گاه به سراغ فرض ضمنی و ارتباطش با این سه گروه می‌رویم.

و اما اول حکایت ساختگی، که داستانی است از ملانصرالدین:

می‌گویندملانصرالدین،انگشترش را در اتاق گم کرده بود، و در حیاط به دنبالش می‌گشت. گفتند: «ملا تو انگشترت را در اتاق گم کرده‌ای، چرا در حیاط به دنبالش می‌گردی؟» ملا جواب داد: «اتاق تاریک بود و حیاط روشن. به‌همین خاطر در حیاط دنبالش می‌گردم.»

اما داستان نیم‌واقعی، که به این دلیل آن را نیمه‌واقعی نامیده‌ایم که ممکن است راست یا دروغ باشد.



این داستان چنان که در «مثنوی معنوی» آمده، چنین است:

غزها برای غارت به دهی ریختند، و دو نفر از بزرگان ده را پیدا کردند و قصد کشتن یکی از آن دو را کردند. مرد پرسید: «برای چه مرا می‌کشید؟»

گفتند: «برای اینکه رفیقت بترسد و بگوید طلا و جواهرات را کجا مخفی کرده است.»

مرد گفت: «حال که چنین است چرا او را نمی‌کشید تا من بترسم و جای طلا و جواهرات را نشان دهم؟»[3]

***

اکنون به حکایت واقعی می‌رسیم. این حکایت، که چندان هم حکایت نیست! در حوزهٔ ریاضیات رخ داده و آن را ژرژ کانتور بیان کرده است:

«*تناظر یک‌به‌یک*»[4]، نیز معروف به نگاشت دوسو یا «*دوسویی*»[5]، بین دو مجموعهٔ A و B، روش جفت کردن هر عضو A با عضوی از B است. این‌ها توابع خاصی از A به B‌اند، که تضمین می‌کنند، هر عضو B متناظر با یک، و تنها یک عضو A است.

دوسویی‌ها در همه جای ریاضیات وجود دارند. برای مثال، هر «جایگشت»[6]، همین‌طور هر «یکریختی»[7] یک نگاشت دوسوست.

در نظریهٔ مجموعه‌ها، اهمیت دوسویی‌ها از این موضوع نشئت گرفته است که: دو مجموعه دارای یک اندازه‌اند؛ اگر، و تنها اگر، بینشان تناظری یک‌به‌یک موجود باشد. این مطلب در مورد مجموعه‌های متناهی آشکار است؛ در واقع به این گونه است که اشیا را می‌شماریم. برای مثال، با تشکیل یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعهٔ {۱,۲,۳,۴,۵,۶} و حروف واقع در کلمهٔ «کانتور»، تعداد حروف را می‌شماریم. همین موضوع بود که وقتی ژرژ کانتور شروع به استفاده از این اصل در سری‌های نامتناهی کرد، بنیان ریاضیات قرن نوزدهم را به لرزه درآورد.[8]

***

در هر سهٔ این داستان‌ها از این فرض که به آن «فرض ضمنی»[9] می‌گویند، استفاده شده است.

در داستان ملا، فرض ضمنی پرسنده‌ها این است که وقتی شیئی در جایی ـ در این مثال انگشتر ملا در اتاق ـ گم شد، باید در همانجا به دنبالش گشت نه در جای دیگر. ملا این فرض را قبول ندارد. به‌همین دلیل در جای دیگری ـ در این مثال در حیاط ـ به دنبال انگشتر گم شدهٔ خود می‌گردد.

در داستان غزها، فرض ضمنی این است که اگر کسی را برای مال و ثروتش در مقابل چشم کس دیگری شکنجه کنند یا بکشند، او می‌ترسد و جای مال و ثروت خود را نشان می‌دهد. غزها و شخص دوم، هر دو از این فرض استفاده می‌کنند.[10]

و اما در داستان کانتور، این فرض ضمنی در میان ریاضی‌دانان‌های آن زمان در نظر گرفته می‌شد که جمیع مجموعه‌های نامتناهی به یک اندازه‌اند. به این معنی که، هر دو مجموعهٔ نامتناهی در تناظری یک‌به‌یک هستند. قضیهٔ کانتور و «استدلال قطری»[11] او، با ابطال این عقیده، به افراد بسیاری شوک وارد کرد.[12]

* قبایل ترک تباری که در قرن ششم هجری قمری در محدودهٔ دریای خزر تا حدود کشور چین به‌صورت پراکنده سکونت داشتند و هر از گاهی به شهرهای ایران تجاوز می‌کردند.

## * پی‌نوشت‌ها

۱. Georg Cantor (۱۹۱۸-۱۸۴۵). کانتور در «سن پطرزبورگ» تولد یافت، اما بیشتر عمر خود را در «هال» به‌سر برد. قسمت آخر عمرش با بیماری‌های روانی مکرر تیره و تار بود و اوقات بسیاری را در آسایشگاه گذراند. عمیق‌ترین کارهایش در ریاضیات نظریهٔ مجموعه‌های نامتناهی و اعداد نامتناهی‌اش بود، و تمایز بین مجموعه‌های شمارا و ناشمارایش از اهمیت خاصی برخوردار است. او را می‌توان به‌عنوان ریاضی‌دانی که بی‌نهایت را آزاد ساخت، در نظر گرفت.

2. tacit assumption

۳. آن غُزانِ تُرکِ خونریز آمدند / بهر یغما در یکی ده در شدند
دو کس از اعیان آن ده یافتند / در هلاک آن یکی بشْتافتند
دست بستندش که قربانش کنند / گفت ای شاهان و ارکان بلند
قصد خون من به چه رُو می‌کنید / از چه آخر تشنهٔ خون منید
چیست حکمت چه غرض در کشتنم / چون چنین درویشم و عُرْیان تنم
گفت تا هیبت بر این یارت زند / تا بترسد او و زر پیدا کند
گفت آخر او ز من مسکین‌تر است / گفت قاصد کرده است او را زر است
گفت چونْ وهم است ما هر دو یکیم / در مقام احتمال و در شکیم
خود ورا بکْشید اول ای شهان / تا بترسم من دهم زر را نشان

(مثنوی معنوی، دفتر دوم، ۵۴-۳۰۴۶)

4. one to one correspondence

5. bijection

۶. permutaion. در مرحله‌ای مقدماتی، می‌توان جایگشت $n$ شیء را به‌عنوان ترتیب یا ترتیب دوبارهٔ $n$ شیء در نظر گرفت. تعداد جایگشت‌های $n$ شیء برابر $n!$ است. تعداد «جایگشت‌های $r$ به $r$، $n$ شیء» با $p(n,r)$ نمایش داده می‌شود، و برابر است با: $n(n-1)...(n-r+1)$، که آن هم برابر است با: $\frac{n!}{(n-r)!}$. برای مثال، در مورد A، B، C و D، چون دوبه‌دو در نظر گرفته شوند، ۱۲ جایگشت موجود است: AB، AC، AD، BA، BC، BD، CA، CB، CD، DA، DB و DC. فرض می‌کنیم که $n$ شیء از $k$ نوع متفاوت و چنان‌اند که $r_1$ شیء از یک نوع، $r_2$ شیء از نوع دوم، و غیره‌اند. در این صورت تعداد جایگشت‌های متمایز $n$ شیء مزبور برابر $\frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!}$ با $r_1+r_2+...+r_k=n$ است. مثلاً تعداد کلمات متفاوتی که از کلمهٔ cheeses می‌توان ساخت، برابر است با $\frac{7!}{3!2!}$، که آن هم برابر است با: ۴۲۰. در سطوح پیشرفته‌تر، جایگشت مجموعهٔ $X$ به‌صورت نگاشت یک‌به‌یک پوشای از $X$ به $X$ تعریف می‌شود. (فرهنگ ریاضیات آکسفورد، کریستفر کلافام، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور).

۷. isomorphism (of groups). یکریختی (گروه‌ها). فرض می‌کنیم $<G, o>$ و $<G', *>$ گروه‌هایی باشند، به این ترتیب که $o$ عمل بر $G$ و $*$ عمل بر $G'$ است. یکریختی بین $<G, o>$ و $<G', *>$ نگاشت یک‌به‌یک پوشای $f$ از مجموعهٔ $G$ به مجموعهٔ $G'$ و چنان است که، به ازای جمیع $a$ و $b$های واقع در $G$، $f(aob)=f(a)*f(b)$. این مطلب بدان معنی است که، اگر $f$، $a$ را بر $a'$ و $b$ را بر $b'$ بنگارد، در این صورت $aob$ را بر $a'*b'$ می‌نگارد. اگر یکریختی‌ای بین دو گروه موجود باشد، دو گروه مزبور نسبت به یکدیگر یکریخت‌اند. دو گروه که نسبت به یکدیگر یکریخت باشند، در اساس یک ساختار دارند: ممکن است عناصر واقعی یک گروه، اشیایی کاملاً متفاوت از عناصر دیگری باشند. اما طریقی که طبق آن نسبت به عمل مربوطه برخورد می‌کنند، یکسان است. برای مثال، گروه اعداد مختلط ۱، $i$، ۱-، $i$- با ضرب، نسبت به گروه عناصر ۰، ۱، ۲ و ۳، با جمع به پیمانهٔ ۴ یکریخت است.

isomorphism (of rings). یکریختی (حلقه‌ها). فرض می‌کنیم که $(R , + , *)$ و $(R' , \oplus , \otimes)$ حلقه‌هایی می‌باشند. در این صورت، یکریختی بین آن‌ها نگاشت یک‌به‌یک و پوشای از مجموعهٔ $R$ به مجموعهٔ $R'$ و چنان است که، به ازای جمیع $a$ و $b$های واقع در $R$، $f(a+b)=f(a)\oplus f(b)$ و $f(a\times b)=f(a)\otimes f(b)$. اگر بین دو حلقه یک یکریختی موجود باشد، حلقه‌های مزبور نسبت به یکدیگر یکریخت‌اند و مانند مورد گروه‌های یکریخت، در اساس دارای یک ساختار هستند (فرهنگ ریاضیات آکسفورد، کریستفر کلافام، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور).

8. Math 1001, Richard Elwes, Quercus Publishing, 2010

۹. فرض ضمنی، فرضی است که استدلال‌کننده بدون اینکه متوجه باشد آن را به‌کار می‌برد، و ملا و کانتور هر دو در استدلال خود این فرض را کنار گذاشته‌اند.

۱۰. البته باید توجه داشت که در هر یک از این سه حکایت، ارزش فرض ضمنی با دیگری تفاوت دارد.

11. diagonal argument

12. Math 1001, Richard Elwes, Quercus Publishing, 2010